ŠIAULIŲ UNIVERSITETAS
MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS
Informatikos katedra

REFERATAS

Klasikiniai grafų teorijos uždaviniai, jų sprendimas, algoritmai. Paieška ir ribojimų tenkinimas (search and constraint satisfacion). Taikymai uždaviniams spręsti

Darbą atliko: Informatikos specialybės
Neakivaizdinio skyriaus
IV kurso studentė
Renata Lomsargienė

Šiauliai, 2007

Turinys

Įvadas

Grafų teorija – matematikos sritis, nagrinėjanti grafus. Grafas yra sudarytas iš lankais (briaunomis) sujungtų viršūnių, kurį galima įsivaizduoti kaip figūrą. Jei grafo briaunos turi kryptį - tai orientuotas grafas. Jei grafas turi tik vieną viršūnę ir nei vienos briaunos - tai trivialus grafas. Grafas be briaunų – tuščias grafas, o be viršūnių ir be briaunų – nulinis grafas.

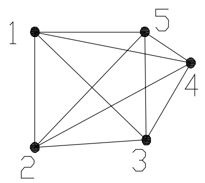
1736 m. buvo nagrinėtas pirmasis grafų teorijos uždavinys. Uždavinys buvo apie Karaliaučiaus (Kionigsbergo) tiltus. Šį uždavinį sėkmingai išsprendė L.Oileris.

1852 m. A.De Morgano iškėlė keturių spalvų hipotezę. Ši keturių spalvų hipotezė buvo įrodyta 1976 m. Buvo pilnai perrinkti kai kurie grafų variantai ir tam sunaudota 1200 kompiuterinio laiko valandų.

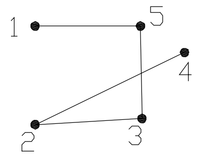
1936 m. matematikas D.Kionigas išleido monografiją "Baigtinių ir begalinių grafų teorija". Jis pirmasis pasiūlė naudoti vieną terminą "grafas" vietoje įvairiuose moksluose naudojamų skirtingų schemų pavadinimų: simpleksai (topologija), grandinės (fizika), diagramos (ekonomika), sociogramos (pcichologija) ir t.t.

Hamiltono maršrutai

Jei kiekviena grafo viršūnė jungima briaunomis su visomis likusiomis viršūnėmis, tai toks grafas yra pilnasis grafas.

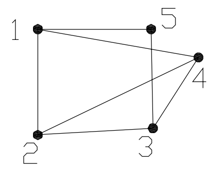


Maršrutas (kelias) apeinantis visas grafo viršūnes po vieną kartą vadinamas *Hamiltono maršrutu*.



Maršrutas: 1,5,3,2,4

Jei pradinė ir galinė maršruto viršūnės sutampa, tai šis maršrutas vadinamas *Hamiltono ciklu*.



Ciklas: 1,4,2,3,5,1 ; Maršrutas: 5,3,2,1,4

Jei pradinė ir galinė maršruto viršūnės nesutampa, tai šis maršrutas vadinamas *Hamiltono grandine*.

Grafas turintis Hamiltono maršrutą vadinamas *Hamiltono grafu*.

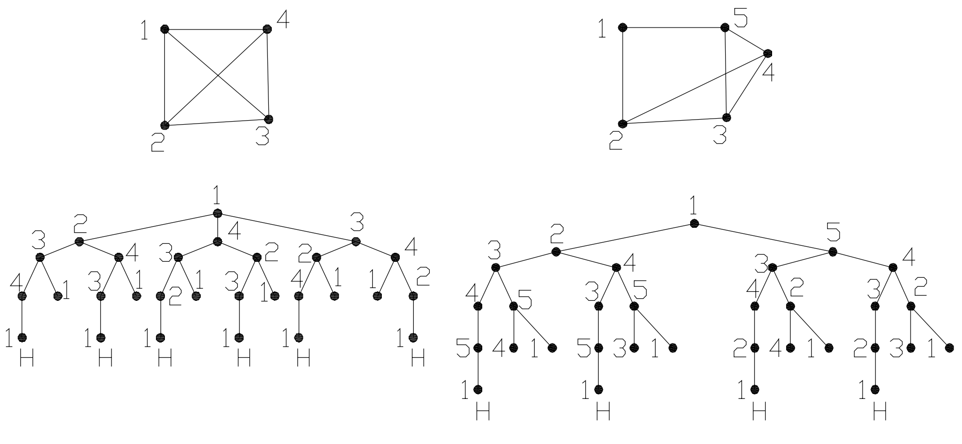
Grafas, kuris yra pilnasis, jis yra Hamiltono grafas.

Artimiausio kaimyno metodas

Keliaujančio pirklio (komivojažieriaus) uždavinys – grafų teorijoje sprendžiamas uždavinys, formuluojamas taip: Turint tam tikrą kiekį miestų, taip pat kelionės iš vieno miesto į kitą kainas, reikia rasti pigiausią maršrutą, kad aplankius kiekvieną miestą maršrutas baigtųsi pradiniame mieste. Grafų teorijoje galima uždavinį performuluoti – kaip rasti mažiausio svorio Hamiltono ciklą grafe su svoriais.

Pradėdami nuo kažkurios grafo viršūnės, pastoviai renkamės iš neaplankytų viršūnių pačią „artimiausią“ (su kuo mažesniu briaunos svoriu). Kai nebelieka neaplankytų viršūnių – grįžtame į pradinę.

Pavaizuosime paieškų medį gilyn su grįžimu perrinkti maršrutai. Raide “H” pažymėti



Hamiltono ciklai.

Turime aplankyti kiekvieną viršūnę po vieną kartą ir grįžti į pirmąją viršūnę. Koks turi būti maršrutas, kad jo ilgis būtų trumpiausias? Šio grafo trumpiausio Hamiltono ciklo paieška galima dviem supaprastintais sprendimo būdais:

artimiausios viršūnės metodas ir

viršūnių įterpimo metodas.

Artimiausios viršūnės metodas

1. Apskaičiuosime trumpiausią Hamiltono ciklą artimiausios viršūnės metodu, esant tokiai grafo atstumų matricai:

$$C = \begin{array}{c|ccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 1 & 0 & 6 & 5 & 10 & 4 \\ 2 & 6 & 0 & 7 & 3 & 8 \\ 3 & 5 & 7 & 0 & 7 & 4 \\ 4 & 10 & 3 & 7 & 0 & 2 \\ 5 & 4 & 8 & 4 & 2 & 0 \end{array}$$

Iš pirmosios viršūnės eisime į 5-ąją viršūnę, nes $c_{15} = \min\limits_{1 \le j \le 5}(c_{1j} / c_{1j} \ne 0), j \ne 1$. Iš atstumų matricos pašalinę 1-ąją eilutę ir 5-ąjį stulpelį, gausime:

$$C = \begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 2 & 6 & 0 & 7 & 3 \\ 3 & 5 & 7 & 0 & 7 \\ 4 & 10 & 3 & 7 & 0 \\ 5 & 4 & 8 & 4 & 2 \end{array}$$

Dabar, iš 5-osios viršūnės keliausime į 3-iąją, nes $c_{53} = \min\limits_{j \ne 1}(c_{5j} / c_{5j} \ne 0)$. Iš perskaičiuotos atstumų matricos pašaliname 5-ąją eilutę ir 3-iąjį stulpelį. Gauname:

$$C = \begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 4 \\ \hline 2 & 6 & 0 & 3 \\ 3 & 5 & 7 & 7 \\ 4 & 10 & 3 & 0 \end{array}$$

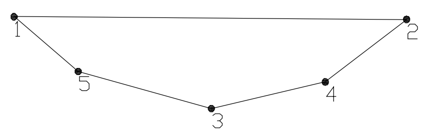
Toliau iš 3-iosio viršūnės eisime į 4-ąją viršūnę, nes $c_{34} = \min\limits_{j \ne 1}(c_{3j} / c_{3j} \ne 0)$. Pašalinus 3-iąją eilutę ir 4-ąjį stulpelį, gauname:

$$C = \begin{array}{c|cc} & 1 & 2 \\ \hline 2 & 6 & 0 \\ 4 & 10 & 3 \end{array}$$

Tada iš 4-osios viršūnės eisime į 2-ąją viršūnę, o iš 2-osios į 1-ąją. Tokiu būdu, maršrutas apskaičiuotas artimiausio kaimyno metodu, yra:

1,5,3,4,2,1.

$c_{15} + c_{53} + c_{34} + c_{42} + c_{21} = 4 + 4 + 7 + 3 + 6 = 24.$



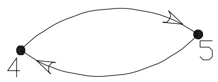
Viršūnių įterpimo metodas

2. Apskaičiuosime Hamiltono ciklą viršūnių įterpimo metodu, esant tai pačiai atstumų matricai.

$C =$

	1	2	3	4	5
1	0	6	5	10	4
2	6	0	7	3	8
3	5	7	0	7	4
4	10	3	7	0	2
5	4	8	4	2	0

Pradinis ciklas bus: 4,5,4



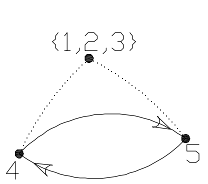
Ciklo pailgėjimą pažymime simboliu d_{itj}, kai tarp viršūnių i ir j įterpiama viršūnė t. Tada:

$d_{415} = d_{41} + d_{15} - d_{45} = 10 + 4 - 2 = 12$,

$d_{425} = d_{42} + d_{25} - d_{45} = 3 + 8 - 2 = 9$,

$d_{435} = d_{43} + d_{35} - d_{45} = 7 + 4 - 2 = 9$.

Terpiant viršūnę tarp 4-osios ir 5-osios, gausime tuos pačius atstumus, nes matrica C yra simetrinė. Vadinasi, 3-iąją viršūnę įterpsime tarp 4-osios ir 5-osios. Gausime ciklą 4,3,5,4.



Apskaičiuojame:

$d_{413} = d_{41} + d_{13} - d_{43} = 10 + 5 - 7 = 8$,

$d_{423} = d_{42} + d_{23} - d_{43} = 3 + 7 - 7 = 3$,

$d_{325} = d_{32} + d_{25} - d_{35} = 7 + 8 - 4 = 11$,

$d_{315} = d_{31} + d_{15} - d_{35} = 5 + 4 - 4 = 5$,

$d_{524} = d_{52} + d_{24} - d_{54} = 8 + 3 - 2 = 9$,

$d_{514} = d_{51} + d_{14} - d_{54} = 4 + 10 - 2 = 12$.

Apskaičiavus gavome, kad mažiausias skaičius yra 3. Vadinasi pailgėjęs ciklas yra: 4,2,3,5,4.
Apskaičiuojame:

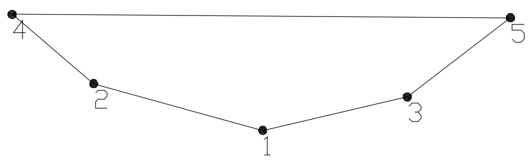
$d_{412} = d_{41} + d_{12} - d_{42} = 10 + 6 - 3 = 13$,

$d_{213} = d_{21} + d_{13} - d_{23} = 6 + 5 - 7 = 4$,

$d_{315} = d_{31} + d_{15} - d_{35} = 5 + 4 - 4 = 5$,

$d_{514} = d_{51} + d_{14} - d_{54} = 4 + 10 - 2 = 12$.

Pasirenkame mažiausią skaičių d_{213}, kuris yra 4. Tada ciklas yra: 4,2,1,3,5,4. Jo ilgis: $c_{42} + c_{21} + c_{13} + c_{35} + c_{54} = 3 + 6 + 5 + 4 + 2 = 20$. Šis maršrutas yra trumpesnis, už gautą artimiausios viršūnės metodu. Įterpimo metode buvo atliktas didesnis perrinkimas.



Sprendimo sudėtingumas
Akivaizdžiausias uždavinio sprendimas – visų įmanomų maršrutų perrinkimas. Tačiau tokio sprendimo sudėtingumas N! (miestų skaičiaus faktorialas), taigi didėjant miestų skaičiui sprendimas pasidaro nepraktiškas.

Tikslūs sprendimai
Tikslų atsakymą pateikiantys algoritmai sprendžia problemą tik su nedideliu miestų skaičiumi:
Įvairūs skaldyk ir valdyk algoritmai, dažniausiai tinkami suskaičiuoti sprendimą daugiausiai 40-60 miestų.
Geriau veikia algoritmai, kurie remiasi tiesiniu programavimu. Tokie algoritmai gali būti efektyviai naudojami tikslaus maršruto tarp 120-200 miestų radimui.
2001 metais buvo suskaičiuotas tikslus maršrutas 15 112 Vokietijos miestų naudojant tiesiniu programavimu paremtą metodą. Skaičiavimui buvo naudojama 110 procesorių tinklas, vienam 500MHz procesoriui būtų prireikę apie 22,6 metų tiems patiems skaičiavimams atlikti.

Euristiniai algoritmai

Įvairūs aproksimaciniai algoritmai gana greitai ir su pakankamai dideliu tikslumu sprendžia keliaujančio pirklio uždavinį. Moderniausi algoritmai gali rasti sprendimus su ypatingai dideliu kiekiu miestų (milijonais) per protingą laiką ir yra įrodyta, kad atsakymas nuo optimalaus sprendimo nėra nutolęs toliau nei 2-3%.

Taikymai

Grafų teorija įdomi vien jau tuo, kad daugelis plačiai žinomų žaidimų ir galvosūkių gali būti suvedama į grafų uždavinius, arba bent jau jų sprendinius patogu atvaizduoti grafais. Grafai tinka ne tik galvosūkių, bet ir realių uždavinių sprendime.
Elektrotechnikoje: lankai – laidai, viršūnės – laidų sujungimai.
Chemijoje: molekulių struktūrų diagramoms; viršūnės – atomai, lankai – jungtys tarp jų.
Transporto sistemose: viršūnės – miestai, lankai – keliai tarp jų.
Sociologijoje: viršūnės – žmonės, lankai – jų pažintys;
Kompiuterių tinklai – aiškus pavyzdys, kur tiks grafų teorijos algoritmai.
Pavyzdžiui, viršūnėmis galima pažymėti valstybes, o briaunomis – diplomatinių santykių tarp jų buvimą. Šiuo atveju briauna rodys simetrinį sąryšį tarp elementų. Tačiau dažnai vaizduojamas ryšys nėra simetrinis, pavyzdžiui norint parodyti, kurios įmonės tiekia detales kitoms įmonėms.
Grafas skaido plokštumą į nesikertančias sritis. Jei grafo viršūnių yra V, briaunų B, tai grafas skaido plokštumą į B-V+2 sričių. (2 – jei išorė laikoma sritimi, 1 – jei ne). tas santykis yra pastovus.
Galima sugalvoti dar daug kitų pavyzdžių – galima sudaryti grafą, kas ką mato auditorijoje, ir pan.

Literatūra

K. Plukas, E. Mačikėnas, B. Jarašiūnaitė, I. Mikuckienė. Taikomoji diskrečioji matematika. Kaunas, 2002.

http://lt.wikipedia.org

http://www.kc.gf.vu.lt/Paskaitos/MK/2-LogAlgGeom2005.htm#_Toc124861788